ورقة عمل في مادة الرياضيات (الأشعة)

الثالث الثانوي العلمي (٢٠٢٠-٢٠٢١)

التمرين الأول : ١١ صفحة ٦٩

لدينا $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه

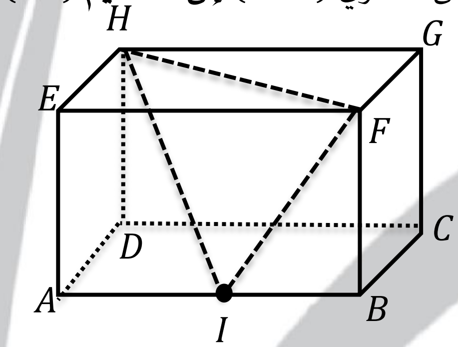
$AB = 2\,, BC = CG = 1$ و لتكن I منتصف AB

① اعط معلماً متجانساً مبدؤه A و واوجد احداثيات رؤوسه واحداثيات النقطة I

② اكتب معادلة المستوي (IFH)

③ احسب بعد G عن المستوي (IFH)

④ احسب بعد G عن المستقيم (IH) ، هل ينتمي المسقط القائم للنقطة G على المستوي (IFH) إلى المستقيم (IH)



الحل : بفرض $\left(A\,, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,, \overrightarrow{AD}\,, \overrightarrow{AE}\right)$ معلم متجانس مبدؤه النقطة A

$$A(0,0,0)\ ,B(2,0,0)\,,C(2,1,0)\ ,D(0,1,0)$$
$$E(0,0,1)\ ,F(2,0,1)\,,G(2,1,1)\ ,H(0,1,1)$$
$$I(1,0,0)$$

② معادلة المستوي (IFH)

$$\overrightarrow{IH}(-1,1,1)\,,\ \ \overrightarrow{HF}(2,-1,0)$$

المركبات غير متناسبة والنقاط $I\,,H\,,F$ ليست على استقامة واحدة ، بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي $p(IFH)$

$$\begin{cases} IH \subseteq p \\ \overrightarrow{IH} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IH}\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow -a+b+c=0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} HF \subseteq p \\ \overrightarrow{HF} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{HF}\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow 2a-b=0 \quad (2)$$

من (2) نجد $b = 2a$ نعوض في (1) نجد $c = -a$

بفرض $a = 1$ فإن $\vec{n}(1,2,-1)$ بفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المطلوب $p(IFH): \vec{n}\cdot\overrightarrow{IM} = 0$

$$1(x-1)+2(y-0)-1(z-0)=0$$
$$p(IFH) : x+2y-z-1=0$$

③ بعد $G(2,1,1)$ عن المستوي (IFH)

$$dist\big(G\,,(IFH)\big) = \frac{|2+2(1)-1-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

④ بعد النقطة $G(2,1,1)$ عن المستقيم (IH)

أولاً : نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (IH)

شعاع التوجيه للمستقيم $\vec{u} = \overrightarrow{IH}(-1\,,1,1)$

$$(IH): \begin{cases} x = -t+1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} ;t \in R$$

ثانياً : بفرض $G_0(-t+1\,,t\,,t)$ مسقط G على المستقيم IH فإن $\overrightarrow{GG_0}(-t-1\ ,t-1\,,t-1)$

$$\overrightarrow{GG_0} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{GG_0}\cdot\vec{u} = 0$$
$$(-1)(-t-1)+1(t-1)+1(t-1)=0$$
$$t+1+t-1+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$$
$$\overrightarrow{GG_0}\left(-\frac{1}{3}-1\ ,\frac{1}{3}-1\,,\frac{1}{3}-1\right)$$
$$\overrightarrow{GG_0}\left(-\frac{4}{3}\ ,-\frac{2}{3}\,,-\frac{2}{3}\right)$$
$$dist\big(G\,,(IH)\big) = \|\overrightarrow{GG_0}\| = \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}}$$
$$dist\big(G\,,(IH)\big) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

ومنه نجد أن $dist\big(G\,,(IH)\big) \neq dist\big(G\,,(IFH)\big)$

فإن المسقط القائم للنقطة G على المستوي (IFH) لا ينتمي إلى المستقيم (IH)

التمرين الثاني ١١ صفحة ٩٨

لدينا $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه

$AB = 2\,, BC = CG = 1$ و لتكن I منتصف AB

والنقطة J منتصف CG، في معلم متجانس $\left(A\,,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\right)$

① احسب المسافتين $DI\,, DJ$

② اثبت أن DI يعامد IJ واحسب $\cos I\hat{J}D$

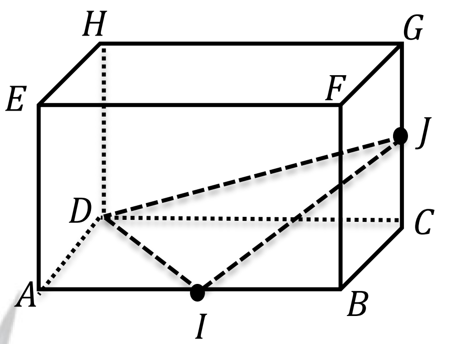
③ اكتب معادلة المستوي (DIJ) ثم احسب بعد H عن المستوي (DIJ)

④ احسب حجم رباعي الوجوه $HDIJ$

⑤ -اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من J والعمودي على المستوي (HID)

-احسب احداثيات النقطة J' نقطة تقاطع d مع المستوي (HID)

-جد بطرق مختلفة بعد J عن المستوي (HID)



الحل :

①. احداثيات النقاط

$$D(0,1,0)\ ,H(0,1,1)\ ,I(1,0,0)\ ,\ J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$$

نحسب الأشعة

$$\overrightarrow{DI}(1,-1,0)\ ,\overrightarrow{DJ}\left(2,0,\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$$

$$\|\overrightarrow{DI}\|=\sqrt{2}\ ,\|\overrightarrow{DJ}\|=\frac{\sqrt{17}}{2}\ ,\ \|\overrightarrow{IJ}\|=\frac{3}{2}$$

②. نحسب الجداء السلمي

$$\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{IJ}=1(1)-1(1)+0\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

ومنه DI يعامد IJ والمثلث DIJ قائم في I

$$cosI\hat{J}D=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}=\frac{IJ}{DJ}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}}=\frac{3}{\sqrt{17}}$$

③. اكتب معادلة المستوي (DIJ)

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي $p(DIJ)$

$$\begin{cases}DI\subseteq p\\ \overrightarrow{DI}\perp\vec{n}\end{cases}\Rightarrow\ \overrightarrow{DI}\cdot\vec{n}=0\ \Rightarrow\ a-b=0\quad(1)$$

$$\begin{cases}DJ\subseteq p\\ \overrightarrow{DJ}\perp\vec{n}\end{cases}\Rightarrow\ \overrightarrow{DJ}\cdot\vec{n}=0\ \Rightarrow\ 2a+\frac{1}{2}c=0\quad(2)$$

من (1) نجد $b=a$ ومن (2) نجد $c=-4a$

بفرض $a=1$ فإن $\vec{n}(1,1,-4)$ بفرض $M(x,y,z)$

نقطة من المستوي المطلوب $p(DIJ):\vec{n}\cdot\overrightarrow{IM}=0$

$$1(x-1)+1(y-0)-4(z-0)=0$$

$$p(DIJ):x+y-4z-1=0$$

بعد $H(0,1,1)$ عن المستوي (DIJ)

$$dist(H,(DIJ))=\frac{|2(0)+1-4(1)-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}}=\frac{4}{\sqrt{18}}$$

$$dist(H,(DIJ))=\frac{4}{\sqrt{18}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

④. حساب الحجم $HDIJ$

$$h=dist(H,(DIJ))=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$S=S_{DIJ}=\frac{DI\cdot IJ}{2}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{3}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h=\frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

⑤. d المار من J والعمودي على المستوي (HDI)

بفرض $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ شعاع توجيه المستقيم d

((المستقيم يعامد المستوي فإن $\vec{u}$ يعامد أي مستقيم واقع داخل المستوي)) $\overrightarrow{DH}(0,0,1)$

$$\overrightarrow{DH}\perp\vec{u}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{DH}\cdot\vec{u}=0\ \Rightarrow\ \gamma=0\quad(1)$$

$$\overrightarrow{DI}\perp\vec{u}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{DI}\cdot\vec{u}=0\ \Rightarrow\ \alpha-\beta=0\quad(2)$$

من (2) نجد $\alpha=\beta$ وبفرض $\beta=1$ فإن $\vec{u}(1,1,0)$

التمثيل الوسيطي لـ d حيثُ $\vec{u}(1,1,0),\ J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$

$$d:\begin{cases}x=t+2\\ y=t+1\\ z=0+\frac{1}{2}\end{cases}\quad;t\in R$$

لإيجاد احداثيات نقطة التقاطع ، نوجد معادلة المستوي (HDI)

المستقيم d يعامد المستوي $P'(HDI)$ فإن

$\vec{n'}=\vec{u}(1,1,0)$ والنقطة $I(1,0,0)$ نقطة من المستوي

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المطلوب

$$p(HDI):\vec{n}\cdot\overrightarrow{IM}=0$$

$$1(x-1)+(y-0)+0(z-0)=0$$

$$P'(HDI):x+y-1=0$$

لإيجاد احداثيات J' (نقطة التقاطع – مسقط J على) (HDI)

نعوض معادلات d في P'

$$t+2+t+1-1=0\ \Rightarrow\ t=-1$$

نعوض في d نجد : $J'\left(-1+2,-1+1,\frac{1}{2}\right)$

$$J'\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$$

حساب بعد J عن المستوي (HDI) بطرائق مختلفة

طريقة أولى : قانون البعد

$$dist(J,(HDI))=\frac{|1(2)+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(0)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

طريقة ثانية :

$$dist(J,(HDI))=\|\overrightarrow{JJ'}\|=\|(1,1,0)\|=\sqrt{2}$$